Reimund Albers Arithmetik als Prozess WiSe 05/06

Lösungen Wiederholungsklausur

1. a) Buchstabe A, Zahl 8
   Voraussetzung ist erfüllt, die Folgerung aber nicht. Also ist die Implikation falsch 2

   b) Ja, die gibt es: Buchstabe A, Zahl 7
   oder Buchstabe B, Zahl 6 1
   Die Voraussetzung ist nicht erfüllt, also ist die Implikation wahr (ex falso quod libet) 1

   c) Kontraposition:
   „Wenn die Zahl nicht 5 ist, dann ist der Buchstabe kein Vokal oder die Zahl ist ungerade." 1
   Ja, die gibt es: Buchstabe B Zahl 1
   Die Voraussetzung ist nicht erfüllt, also ist die Implikation wahr. 1

[8] d) Nein, die gibt es nicht. 1 Aussage und Kontraposition sind zueinander äquivalent.
   Also sind immer beide Aussagen erfüllt oder nicht erfüllt. 1

2. a)

$$299 = 1 \cdot 221 + 78$$
$$221 = 2 \cdot 78 + 65$$
$$78 = 1 \cdot 65 + 13 \quad \Rightarrow \quad ggT(299, 221) = 13$$
$$65 = 5 \cdot 13 + 0$$

3

   b) Man findet die Lösung durch rückwärtiges Auflösen der Rechnungen zum Eukl. Algor.

→

$13 = 1\cdot \underline{78} - 1\cdot \underline{65}$ $\quad$ $\underline{65} = \underline{221} - 2\cdot\underline{78}$

$13 = 1\cdot\underline{78} - (\underline{221} - 2\cdot\underline{78})$

$= 3\cdot\underline{78} - \underline{221}$ $\quad$ $\underline{78} = 2\underline{99} - \underline{221}$

$= 3\cdot(299 - 221) - 221$ (3)

$= 3\cdot 2\underline{99} - 4\cdot\underline{221}$ $\quad$ Also $x = -4$, $y = 3$

c) Da $ggT(299, 221) = 13$, ist für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ die linke Seite der Gleichung durch 13 teilbar. Die rechte Seite, 1300001, ist es offensichtlich nicht. Also kann es kein ganzzahliges Lösungspaar (x, y) geben. (2)

8

3. a) 6 Dinge davon 2, 1, 3 gleich. Ansatz (1)

Also $\frac{6!}{2!1!3!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3}} = 60$

Es gibt 60 Permutationen. (1)

b) Ich berechne, wie viele Wörter mit „A" anfangen Ansatz (1)

$A\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{Permut.}}$ vorn steht ein A, dann folgen alle Permutationen von 5 Dingen, davon 1, 1, 3 gleich

Das sind $\frac{5!}{1!\,1!\,3!} = 5\cdot 4 = 20$ (1)

Also steht auf Platz 21 das erste Wort, das mit B anfängt. (1)

c) 3 Fälle

1. Fall: Alle drei Buchstaben sind verschieden

A, B, C $\quad$ 1 Möglichkeit

2. Fall: Alle drei Buchstaben gleich

CCC $\quad$ 1 Möglichkeit

3. Fall: 1 Paar ein davon verschiedener Buchstabe

Paar	A	A	C	C
Einzelner Buchst	B	C	A	B

4 Möglichkeiten

8 Also gibt es insgesamt 6 Möglichkeiten, eine Dreiergruppe zu wählen. 3

4a. $2^5 \equiv -4 \mod n \Rightarrow 32+4 = k \cdot n \quad k,n \in \mathbb{N}$ 1

Für n sind alle Teiler von 36, größer als 4 möglich. Also $n \in \{6, 9, 12, 18, 36\}$ 1

$2^6 \equiv 1 \mod n \Rightarrow 64-1 = k' \cdot n \quad k' \in \mathbb{N}$

Für n sind alle Teiler von 63, größer als 4 möglich. Also $n \in \{7, 9, 63\}$ 1

Beide Bedingungen sind nur für $n = 9$ erfüllt 1

Somit lautet die gesamte Rechnung:

$$\left.\begin{array}{l} 2^2 \equiv 4 \mod 9 \\ 2^3 \equiv -1 \mod 9 \\ 2^4 \equiv -2 \mod 9 \end{array}\right\} 1$$

$2^5 \equiv -4 \mod 9$

5 $2^6 \equiv 1 \mod 9$

b.

$10 \equiv 10 \mod 41 \quad g_0 = 1 \quad g_1 = 10$

$100 \equiv 18 \mod 41 \quad g_2 = 18$

$1000 \equiv 16 \mod 41 \quad g_3 = 16$

$10^4 \equiv -4 \mod 41 \quad g_4 = -4$

$10^5 \equiv 1 \mod 41 \quad g_5 = 1$ 2

Nun wiederholen sich die Gewichte periodisch, also $g_6 = g_1 = 10$, $g_7 = g_2 = 18$, ... 1

gewichtete QS $\quad 1 \; x \; 0 \; 2 \; y \; 1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \; -4 \; 16 \; 18 \; 10 \; 1$

$1 - 4x + 36 + 10y + 1 = k \cdot 41 \quad k \in \mathbb{Z}$ (1)

$-4x + 10y + 38 = k \cdot 41$

Da x, y Ziffern sind, also $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

ist auf der linken Seite die kleinste Zahl

$x = 9 \quad y = 0 : \quad -36 + 0 + 38 = 2$

und die größte Bereich/Grenzen (2)

$x = 0 \quad y = 9 \quad 0 + 90 + 38 = 128$

Also sind für k folgende Fälle zu betrachten

$k = 1: \quad -4x + 10y + 38 = 41 \iff -4x + 10y = 3$

keine Lösung, da links immer eine gerade Zahl steht (1)

$k = 2: \quad -4x + 10y = 2 \cdot 41 - 38 = 44$

$x = 4 \quad y = 6 \quad , \quad x = 9 \quad y = 8$

Also sind 140261 und 190281 durch 41 teilbar (2)

$\boxed{10}$ $k = 3: \quad -4x + 10y = 3 \cdot 41 - 38 = 85$

siehe $k = 1$ (1)

5a) kleiner Satz von Fermat:

$a^{p-1} \equiv 1 \mod p \quad$ für $1 \leq a \leq p-1$ und p prim

also gilt $23^{30} \equiv 1 \mod 31$ (1)

damit auch $23^{90} \equiv 1 \mod 31$ (1)

Dann ist $23^{92} = 23^2 \cdot 23^{90} \equiv 23^2 \mod 31$

$\equiv 529 \mod 31$

$23^{92} \equiv 2 \mod 31$ (2)

5

b) Der kleine Satz von Fermat gilt nur für Primzahlen. Folglich ist nicht sicher, ob $17^{20} \overset{?}{\equiv} 1 \mod 21$ gilt. 1

Bequem ist das fortgesetzte Quadrieren

$17^2 \equiv 16 \mod 21$

$17^4 \equiv 16^2 \equiv 4 \mod 21$

$17^8 \equiv 4^2 = 16 \mod 21$

$17^{16} \equiv 16^2 \equiv 4 \mod 21$

$17^{32} \equiv 4^2 = 16 \mod 21$

$17^{64} \equiv 16^2 \equiv 4 \mod 21$

zerlege

$$
\begin{aligned}
17^{92} &= 17^{64} \cdot 17^{28} \\
&= 17^{64} \cdot 17^{16} \cdot 17^{8} \cdot 17^{4} \\
&\equiv \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 16}_{} \cdot 4 \mod 21 \\
&\equiv 4 \cdot 4 \mod 21
\end{aligned}
$$

$$\underline{\underline{17^{92} \equiv 16 \mod 21}}$$

3

8

Aufgabe 6

Vollständige Induktion

Die zu beweisende Aussage A(n):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Beweis durch vollständige Induktion über n :

Induktionsanfang A(1): Die Aussage gilt für $n=1$

denn: $$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4} \qquad \text{rechts: } \frac{1}{3\cdot 1+1} = \frac{1}{4} \checkmark \qquad 1$$

Induktionsschluss

Induktionsvoraussetzung A(n) :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Induktionsbehauptung A(n+1) :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n+1}{3n+4} \qquad 1$$

Induktionsbeweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)}}_{\text{Ind. Vor.}} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \qquad 1$$

$$= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \qquad 1$$

$$= \frac{n\cdot(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$= \frac{3n^2+4n+1}{(\ )(\ )}$$

Umformung

$$= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3n+4} \qquad 4$$

37

Q.E.D.

Durch den Induktionsanfang und den Induktionsschluss von n auf n+1 ist die Aussage A für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.